

Infos: Plan & listes pour l'examen blanc sont sur moodle

Exercice à rendre : Je ramasse les copies papier au cours du lundi 28 avril.

Rappel: Théorème 5.5 (Théorème des fonctions implicites, $n=2$)
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D$, $f \in C^1(D)$ et $c = f(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Alors,

(i) si $\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$, alors, localement autour de $(\tilde{x}, \tilde{y})$,

(i) idem mais
 $x \leftarrow \varphi(y)$.

l'ensemble de niveau c de f est le graphe d'une fonction de x , $\varphi(x)$ de classe C^1 tq.

$$\varphi(\tilde{x}) = \tilde{y} \quad \text{et} \quad f(x, \varphi(x)) = c$$

Plus précisément, $\exists a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $a < \tilde{x} < b$, $\alpha < \tilde{y} < \beta$ et $\varphi \in C^1([a, b])$ tq

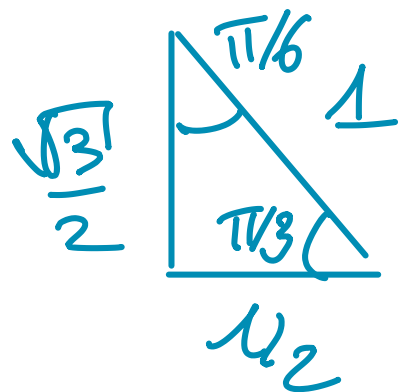
$$f^{-1}(\{c\}) \cap]a, b[\times]\alpha, \beta[= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]a, b[\text{ et } y = \varphi(x)\}$$

De plus, on a alors, $\varphi'(\tilde{x}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})}$

Exemple 5.6

(i) Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x^2) + \cos(y^2)$

$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\sqrt{\frac{11}{6}}, \sqrt{\frac{21}{3}}\right)$. On a $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \underbrace{\sin\left(\frac{11}{6}\right)}_{1/2} + \cos\left(\frac{21}{3}\right)$



$$\cos(2\pi/3) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \Rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \in f^{-1}(\{0\}).$$

Localement autour de $(\tilde{x}, \tilde{y})$, $f^{-1}(\{0\})$ est-il le graphe d'une fonction $\phi(x)$ ou $\psi(y)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos(x^2), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 2\sqrt{\frac{\pi}{6}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y \sin(y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ = -\sqrt{2\pi} \neq 0$$

→ On a le cheri! Cherissons $\varphi(x)$:

$$\exists \varphi \text{ tq } \varphi(\tilde{x}) = \tilde{y} \quad \left(\varphi\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \right)$$

$$\text{et } f(x, \varphi(x)) = 0$$

$$\varphi'(\tilde{x}) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})} = -\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{-\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2}.$$

$$(ii) \quad f(x, y) = x - y^3, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0). \quad f(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0,$$

$$(0, 0) \in f^{-1}(\{0\})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 \neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0.$$

Question: $\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \rightarrow \nexists \varphi \text{ tq } \varphi(\tilde{x}) = \tilde{y} \text{ et } f(x, \varphi(x)) = 0$

Ron: il peut se produire:

- $f^{-1}(\{c\})$ n'est pas le graphe d'une fonction (Exemples 5.2 (ii), (iii) $c=0$)
- $f^{-1}(\{c\})$ est le graphe d'une fonction, mais pas C^1

ici, $\phi(x) = \sqrt[3]{x}$ qui n'est pas dérivable en $\tilde{x} = 0$
- $f^{-1}(\{c\})$ est quand même le graphe d'une fonction.

$$f(x, y) = x^3 - y^3, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0), \quad \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$$

$$\text{Mais } f^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

pour notre exemple $\psi(y) = y^3$

Théorème 5.7 (Fonctions implicites dans $\mathbb{R}^3$)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un ensemble ouvert, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in D$, $f \in C^1(D)$
et $h = f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

(i) Si $\frac{\partial f}{\partial z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq 0$, alors, localement autour de $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

l'ensemble de niveau h de f est le graphe d'une fonction $\varphi(x, y)$ de classe C^1 tq

$$\varphi(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{z}, \quad f(x, y, \varphi(x, y)) = h.$$

Plus précisément, $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tq $a < \tilde{x} < b$, $c < \tilde{y} < d$
 $\alpha < \tilde{z} < \beta$, $\varphi \in C^1([a, b[\times]c, d[)$ tq

$$f^{-1}(\{h\}) \cap]a, b[\times]c, d[\times]\alpha, \beta[$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in]a, b[\times]c, d[, \quad z = \varphi(x, y)\}$$

De plus, on a alors,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\frac{\partial f}{\partial z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\frac{\partial f}{\partial z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}$$

(ii) si $\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq 0$, alors, localement autour de $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, $f^{-1}(\{h\})$ est le graphe d'une fonction $\psi(x, z)$ de classe C^1 tq

$$\psi(\tilde{x}, \tilde{z}) = \tilde{y}, \quad f(x, \psi(x, z), z) = h.$$

Plus précisément $\exists a, b, c, d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $a < \tilde{x} < b$, $c < \tilde{z} < d$, $\alpha < \tilde{y} < \beta$, $\psi \in C^1([a, b] \times [c, d])$ tq

$$f^{-1}(\{h\}) \cap [a, b] \times [\alpha, \beta] \times [c, d]$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in [a, b] \times [c, d], y = \psi(x, z) \}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{z}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}(\tilde{x}, \tilde{z}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}$$

(iii) Si $\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq 0$, pareil, mais avec $z(y, z)$

...

§ 5.2 Droite et plan tangent à un ensemble de niveau.

Méthode 5.8 ($n=2$, droite tangente à une courbe de niveau)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f \in C^1(D)$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D$
tq $\nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq (0, 0)$ et $C = f(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Alors, la droite d'équation $\langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}), (x - \tilde{x}, y - \tilde{y}) \rangle = 0$
est la droite tangente à l'ensemble de niveau
 C de f en $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Pourquoi? Si $\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$, $f^{-1}(\{c\}) \cap \dots = \{(x, y) : y = \varphi(x)\}$

Droite tangente au graphe de φ au point $(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ est la droite d'équation

$$y = \underbrace{\varphi(\tilde{x})}_{\tilde{y}} + \underbrace{\varphi'(\tilde{x})(x - \tilde{x})}_{-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})}} \Leftrightarrow y - \tilde{y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})}(x - \tilde{x})$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})(y - \tilde{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y})(x - \tilde{x})}_{\langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}), (x - \tilde{x}, y - \tilde{y}) \rangle} = 0$$

Exemple 5.9

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $c = f(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1$

La droite tangente à $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ est la droite d'équation.

$$\left\langle \nabla f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}, y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = 0$$

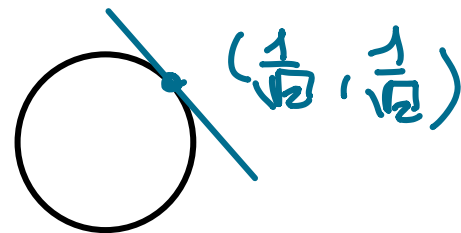
$$\Leftrightarrow \left\langle (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}, y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2}y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2 = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$



Remarque 5.10 (graphe $\rightarrow$ ensemble de niveau)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, le graphe de f , $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ est l'ensemble de niveau 0 de la fonction

$$g(x, y) = y - f(x).$$

Méthode 5.11 ($n=3$, plan tangent à une surface de niveau)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert, $f \in C^1(D)$, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in D$ tq $\nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq (0, 0, 0)$ et $c = f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

Alors, le plan d'équation

$\langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), (x - \tilde{x}, y - \tilde{y}, z - \tilde{z}) \rangle = 0$ est le plan tangent à la surface $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$ en

$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

Exemple 5.12

Soit la surface $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + 4z^2 = 6 \}$

Calculons l'équation du plan tangent à S en $(-1, 1, 1)$

Soit $f(x, y, z) = x^4 + y^2 + 4z^2$. $S = f^{-1}(\{6\})$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1, 1) = -4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1, 1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 8z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(-1, 1, 1) = 8.$$

$$\Rightarrow \langle \nabla f(-1, 1, 1), (x+1, y-1, z-1) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow -4(x+1) + 2(y-1) + 8(z-1) = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 4z - 7 = 0$$

Remarque 5.13: (Graphe $\rightarrow$ ensemble de niveau)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, son graphe est l'ensemble de niveau 0 de la fonction $g(x, y, z) = z - f(x, y)$.

Chapitre 6: Étude de fonctions & optimisation

§ 6.1 Intro & étude locale

Définition 6.1: min/max / extremum

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble, $\tilde{x} \in E$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que

(i) $\tilde{x}$ est un minimum local si $\exists \delta > 0$ tq
 $\forall x \in E \cap B(\tilde{x}, \delta), \quad f(x) \geq f(\tilde{x})$.

(ii) $\tilde{x}$ est un maximum local si $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in E \cap B(\tilde{x}, \delta)$,
 $f(x) \leq f(\tilde{x})$.

(iii) $\tilde{x}$ est un extremum local si c'est un min ou
un max local.

(iv) $\tilde{x}$ est un minimum global si $\forall x \in E$, $f(x) \geq f(\tilde{x})$

(v) — " — maximum global — " — $f(x) \leq f(\tilde{x})$

(vi) $\tilde{x}$ est un extremum global si c'est un min ou
un max global

(vii) f prend son maximum (resp. prend son minimum)
si $\exists \tilde{x} \in E$ tq $\tilde{x}$ est un max (resp. min) global.

Proposition 6.2

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé, borné^{non-vide} et $f \in C^0(E)$.
Alors, f prend son min et son maximum sur E .

Remarque 6.3

C'est quoi une fonction continue sur un fermé?

Pour nous $\exists D \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $g \in C^0(D)$ tq

$E \subseteq D$ et $\forall x \in E, g(x) = f(x)$.

Rappel stratégique pour trouver min/max d'une fonction

Analyse I : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$x \in]a, b[\text{ tq } f'(x) = 0$

$x = a, x = b$

$\left(\begin{array}{l} x \text{ tq } f \text{ n'est pas dérivable} \\ \text{en } x \end{array} \right)$

fini de valeurs à comparer

Analyse II : $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$x \in \text{int } E, \nabla f(x) = 0$

$x \in \partial E \rightarrow \# \text{ infini de points!}$

$\left(\begin{array}{l} x \text{ tq une dérivée partielle} \\ \text{de } f \text{ n'existe pas en } x \end{array} \right)$

$\Rightarrow$ besoin de techniques supplémentaires.

Proposition 6.4 (Extremum local condition nécessaire)

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tilde{x} \in \text{int } E$. Si $\tilde{x}$ est un extremum local de f et les dérivées partielles de f existent en $\tilde{x}$, alors,
 $\nabla f(\tilde{x}) = 0$.